

# 基于单调性与相关边的多边形内外点判断算法

李基拓 陆国栋 冯 星

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

**摘要** 为了充分挖掘多边形边的基本性质——单调性,基于检测点与多边形边之间的坐标关系,提出了相关边的概念及一种判断点在多边形内外新算法.综合运用单调性与相关边技术,将点与多边形之间的位置关系转化为点与其相关边之间的位置关系,从而尽可能地避免了叉积运算,且无需求交运算,从根本上提高了算法的效率,同时新算法还简单地解决了射线法中的临界位置问题.程序验证表明,新算法易于实现,适用于简单多边形,具有运行速度快、稳定性高等优点.

**关键词** 多边形 单调性 相关边 内外点判断

中图法分类号: TP391.72 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2002)06-0596-05

## A New Algorithm of Point in-out Polygon Test Based on Monotonicity and Correlative Edges

LI Ji-tuo, LU Guo-dong, FENG Xing

(State Key Lab. of CAD&CG at Zhejiang University, Hangzhou 310027)

**Abstract** Point in-out polygon test is one of the fundamental issues in Computer graphics. In this paper, the fundamental characteristic of the polygon edges—monotonicity is utilized sufficiently. According to the coordinate relations between the points and the edges, the conception of correlative edges is proposed. By integrating monotonicity with correlative edges, a new algorithm of point in-out polygon is put forward. The new algorithm transforms the relationship between a point and a polygon into that between a point and its correlative edges. The operations of intersection are avoided, and the operations of cross product are reduced as far as possible. The efficiency of the algorithm is raised radically. It is proved simply and effectively when the points are at critical positions. Software implementation verifies the high robustness and efficiency of the new algorithm.

**Keywords** Polygon, Monotonicity, Correlative edge, Point in-out test

### 0 引言

简单多边形  $Q = (P_1P_2 \dots P_n)$  ( $n$  为简单多边形顶点数)是具下列性质的多边形:(1)所有的顶点均不相同;(2)任何一个顶点都只属于它所在的两条边;(3)任何两条非相邻边都不相交.计算机图形学中常用多边形来描述几何形体,且一般均为简单多边形,并规定多边形顶点序列按逆时针排列为正方向.点在多边形内外的判断是计算机图形学领域的一个基本问题.

已有很多学者<sup>[1~6]</sup>对多边形内外点判断进行了

研究,在众多算法中经典射线法应用最为广泛:从检测点作一条射线至无穷远,求射线与多边形的交点,若交点个数为奇数,则点在多边形内,否则点在外.射线法中存在大量求交运算,且对于临界情况,即当检测点  $P_0$  (文中均记检测点为  $P_0$ ) 的  $Y$  轴坐标值与多边形某一顶点的  $Y$  轴坐标值相等时(图1),该算法需对其进行特殊处理,因而射线法存在较大的计算量,且稳定性不理想.

文献[1]提出了一种新的算法:用  $J(P_0, S_i)$  表示过  $P_0$  点的一水平直线  $L$  (文献[1]中为一竖直直线,为了与本文算法进行比较,将其改为水平直线,这并不影响文献[1]的算法实质)与多边形的某一边

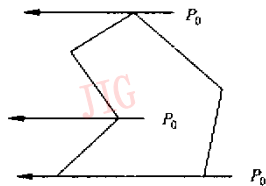


图 1 临界情况

$S_i$  的相交关系,若相交,且交点与该边端点不重合,则记为  $J(P_0, S_i) = \pm 2$  (当  $P_0$  位于有向边  $S_i$  的不同侧时取不同的符号,下同);当交点与端点重合时,记为  $J(P_0, S_i) = \pm 1$ ;无交点或交点与  $P_0$  重合时,则记为  $J(P_0, S_i) = 0$ . 对  $n$  边形,将  $J(P_0, S_i)$  叠加记为  $J(P_0, Q)$ ,即

$$J(P_0, Q) = \sum_{i=1}^n J(P_0, S_i) \quad (1)$$

则有:若  $J(P_0, Q) = 0$ ,  $P_0$  在多边形外;

若  $J(P_0, Q) = \pm 4$ ,  $P_0$  在多边形内;

若  $J(P_0, Q) = \pm 2$ ,  $P_0$  在多边形的边界上.

文献[1]的方法无需进行求交运算,对临界问题的处理较以往算法简单,因而具有良好的稳定性,且计算量也较其他算法小.但文献[1]中,对多边形中与过  $P_0$  点的水平直线相交的边均需进行叉积判断运算,每次叉积判断中包含了 2 次乘法和 5 次减法运算;对临界问题的处理及对多边形中与过  $P_0$  的水平线相交的边的查找还可作进一步的简化.

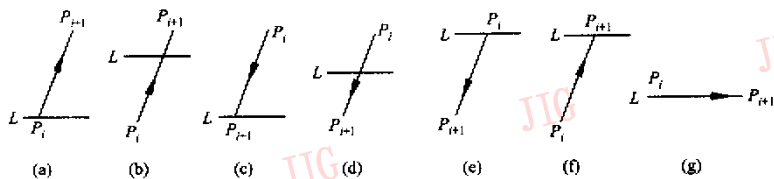


图 2 直线  $L$  与边  $P_iP_{i+1}$  相交的几种情况

如图 3 所示,多边形顶点坐标为:  $A(10, 120)$ ,  $B(-10, -30)$ ,  $C(-50, 100)$ ,  $D(-70, 0)$ ,  $E(-40, 0)$ ,  $F(-20, -60)$ ,  $G(50, 0)$ ,  $H(60, 100)$ ,  $I(80, -80)$ ,  $J(130, 0)$ ,  $K(100, 0)$ ,  $L(50, 150)$ ,  $M(30, 0)$ . 由定义 2,对于检测点  $P_{01}(22, 0)$ ,其增相关边为  $KL, MA, BC, GH$ ,减相关边为  $LM, AB, CD, HI$ .

**定理 1** 若已知多边形  $Q$  存在检测点  $P_0$  的一相关边  $L_1$ ,则此多边形必存在  $P_0$  的另一相关边  $L_2$ ,且  $L_1$  与  $L_2$  的单调性相异.

**证明** 设一过  $P_0$  点且平行于  $X$  轴的水平直线  $L$  与多边形一减单调边  $L_1$  相交(图 4(a)),虚线表示

文献[2]所提出的多边形内外点判断,其思想与射线法存在一定的相同之处,对临界位置的处理比射线法简单,但算法的复杂度相同,均需进行求交运算,且当  $P_0$  处于不同的临界位置时,文献[2]中算法仍需对其进行分别处理.夹角之和检验法由于存在大量三角函数运算[3],其效率远远低于射线法.

本文在前人已有研究的基础上,充分挖掘多边形的基本性质——单调性,又进一步提出相关边的概念,给出了一种判断点在多边形内外的新算法.

## 1 单调性与相关边

建立多边形顶点的存储链表,找出多边形的最高、最左、最低、最右点  $p_U, p_L, p_D, p_R$ .

**定义 1** 对多边形边  $P_iP_{i+1}(i=1, 2, \dots)$ ,若有  $Y_{P_i} > Y_{P_{i+1}}$  则称该边为减单调边;反之则称为增单调边;若  $Y_{P_i} = Y_{P_{i+1}}$  则称之为水平边.称多边形边的这种性质为边的单调性.

**定义 2** 对多边形其中一边  $P_iP_{i+1}$ ,当  $Y_{P_i} \leq Y_{P_0} < Y_{P_{i+1}}$  时,称  $P_iP_{i+1}$  为  $P_0$  的增相关边,如图 2(a)、(b)所示;当  $Y_{P_{i+1}} \leq Y_{P_0} < Y_{P_i}$  时,称  $P_iP_{i+1}$  为  $P_0$  的减相关边,如图 2(c)、(d)所示.

如图 2(e)、(f)中,  $P_iP_{i+1}$  虽与水平直线  $L$  相交;图 2(g)中,  $P_iP_{i+1}$  与直线  $L$  重合,但不满足定义 2 中所列条件,因而不视其为  $P_0$  的相关边.

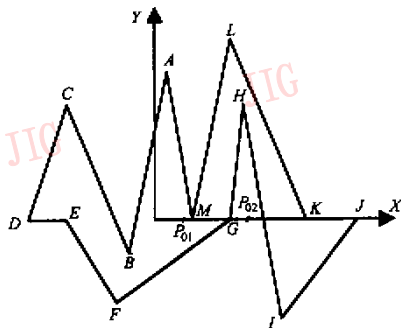


图 3 检测点与相关边

闭合回路,由多边形的封闭性可知,必存在这样的边  $P_i P_{i+1}$ ,满足  $Y_{P_i} \leq Y_{P_0} < Y_{P_{i+1}}$ ,边  $P_i P_{i+1}$  即可视为增单调边  $L_2$ . 易证明,当  $L_1$  为增单调边时(图4(b))的正确性.

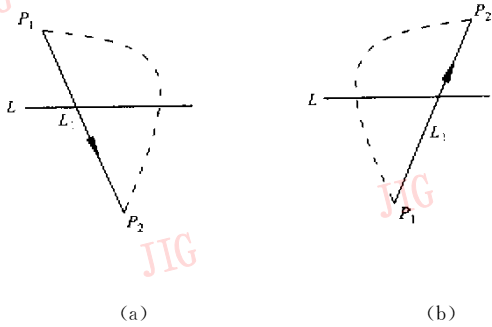


图4 检测点  $P_0$  的相关边成对出现

由定理1可知,检测点  $P_0$  相关边的数目必为偶数,且在存储链上相邻两相关边的单调性相异.

**定义3** 从多边形的最低点开始,按逆时针查找检测点  $P_0$  的相关边,每条增相关边与它下一减相关边构成检测点  $P_0$  的相关边对.

如图3所示,检测点  $P_{01}$  的相关边对为  $KL$  与  $LM$ ,  $MA$  与  $AB$ ,  $BC$  与  $CD$ ,  $GH$  与  $HI$ .

## 2 算法描述

### 2.1 关系判断准则的建立

检测点  $P_0$  与其相关边对间的位置关系可分为:  $P_0$  位于相关边对间,如图3中,检测点  $P_{01}$  位于其相关边对  $MA$  与  $AB$  间,检测点  $P_{02}$  位于其相关边对  $GH$  与  $HI$  间;  $P_0$  位于相关边对外,如图3中,  $P_{01}$  位于其相关边对  $GH$  与  $HI$  外,  $P_{02}$  位于其相关边对  $MA$  与  $AB$  外;  $P_0$  位于相关边上,即  $P_0$  落在某一相关边上.

通过分析可得,当  $P_0$  落在相关边对间时,则  $P_0$  分别位于构成此相关边对的两相关边的同侧,如图3中检测点  $P_{01}$  分别位于其相关边  $MA$ 、 $AB$  的左侧,

检测点  $P_{02}$  分别位于其相关边  $GH$ 、 $HI$  的右侧;当  $P_0$  位于相关边对外时,则  $P_0$  分别位于构成此相关边对的两相关边的异侧,如图3中,  $P_{01}$  分别位于其相关边  $GH$ 、 $HI$  的左侧和右侧.

易知,当  $P_0$  位于多边形内时,  $P_0$  必位于  $P_0$  的某相关边对间;当  $P_0$  位于多边形外时,  $P_0$  必在其所有相关边对外;按逆时针方向从下极点开始找  $P_0$  点的相关边,所找到的第1条相关边为增相关边,从而推得  $P_0$  与多边形间的位置关系判断准则为:

(1) 当  $P_0$  落在多边形外时,在  $P_0$  与其相关边之间的位置关系中,“左”和“右”的次数相同;

(2) 当  $P_0$  落在多边形内时,在  $P_0$  与其相关边之间的位置关系中,“左”的次数比“右”的次数多2;

以  $R_i$  表示  $P_0$  与相关边间的位置关系,且令

$$R_i = \begin{cases} 1, & P_0 \text{ 在第 } i \text{ 条相关边的左侧} \\ 0, & P_0 \text{ 在第 } i \text{ 条相关边上} \\ -1, & P_0 \text{ 在第 } i \text{ 条相关边的右侧} \end{cases} \quad (2)$$

$$s = \sum_{i=1}^n R_i \quad (n \text{ 表示 } P_0 \text{ 的相关边数目}) \quad (3)$$

则有

$$s = \begin{cases} 0, & P_0 \text{ 在多边形外} \\ 2, & P_0 \text{ 在多边形内} \\ \text{其他}, & P_0 \text{ 在多边形上} \end{cases} \quad (4)$$

但根据以上准则,容易将落在多边形水平边上的点误判为多边形外或多边形内,如图3所示,将落在边  $JK$  上的点误判为多边形外,将  $DE$  上的点误判为多边形内.而这一问题可以在相关边的查找过程中加以解决.

### 2.2 相关边的查找

以  $(X_{p_L}, Y_{p_U})$  为左上顶点,以  $(X_{p_R}, Y_{p_D})$  为右下顶点,作多边形的包围盒  $\text{Box}$ ,若检测点  $P_0$  在包围盒外,则点在多边形外,算法结束;否则继续执行以下C程序.

```

if(boxinclusion( $P_0$ )) /* 若  $P_0$  在  $\text{Box}$  内 */
{
  int flag1=0; /* 查找相关边的标志,若 flag1==0,则查找增相关边,找到后,将 flag1 置 1;若 flag1==1,则查找减相关边,找到后将 flag1 置 0 */
  int flag2=0; /* 点在多边形形边上的标志,若点在多边形边上,则 flag2=1;否则 flag2=0 */
   $P_i = p_D$ ; /* 从最低点开始找起 */
  while(1) /* 进入相关边查找循环 */
  {
    while(flag1==0) /* 若 flag1==0,则查找增相关边 */
    {
      if( $Y_{P_{i+1}} \geq Y_{P_0}$ )
      {
        if( $Y_{P_{i+1}} = Y_{P_0}$ ) /* 如果  $P_i P_{i+1}$  为如图 2(g) 或 (f) 所示的边 */
        {
          if( $Y_{P_i} = Y_{P_{i+1}}$ ) /* 若  $P_i P_{i+1}$  为如图 2(g) 所示的水平边 */

```

```

{
  if( $X_{P_i} \leq X_{P_0} \leq X_{P_{i+1}} \parallel X_{P_i} \geq X_{P_0} \geq X_{P_{i+1}}$ ) /* 若检测点  $P_0$  点在边  $P_i P_{i+1}$  上 */
  {
    flag2=1;
    break; /* 退出增相关边的查找 */
  }
}
else
{
  flag1=1; /* 找到增相关边  $P_i P_{i+1}$  */
  relationship( $P_i, P_{i+1}, P_0$ ); /* 判断  $P_0$  点与增相关边  $P_i P_{i+1}$  间的位置关系 */
}
 $P_i = P_{i+1}$ ; /* 下移一个顶点 */
if( $P_i == p_D$ ) break; /* 若顶点  $P_i$  为最低点,则退出循环,结束增相关边查找 */
}
while(flag1) /* 若 flag1 为 1,则查找减相关边 */
{
  if( $Y_{P_{i+1}} \leq Y_{P_0}$ ) /* 顶点  $P_{i+1}$  的 Y 坐标  $<$   $P_0$  点的 Y 坐标 */
  {
    flag1=0; /* 找到减相关边  $P_i P_{i+1}$  */
    relationship( $P_i, P_{i+1}, P_0$ ); /* 判断  $P_0$  点与减相关边  $P_i P_{i+1}$  间的位置关系 */
  }
   $P_i = P_{i+1}$ ; /* 下移一个顶点 */
}
if(flag2==1 ||  $P_i == p_D$ ) break; /* 若  $P_0$  点在多边形边上或顶点  $P_i$  为最低点则退出循环,结束相关边查找 */
}
}

```

对相关边的查找,因只需进行条件判断运算,因而是相当快的,且在查找相关边的同时有效地解决了检测点在多边形水平边上的问题,保证了算法的稳定性.

2.3 检测点与其相关边的位置关系判断

$P_0$  与相关边  $P_i P_{i+1}$  间的位置关系可用以下方法来判别:

- (1) 当  $P_i P_{i+1}$  为减单调边时,若  $X_{P_0} > X_{P_i} \&\& X_{P_0} > X_{P_{i+1}}$ ,则点在  $P_i P_{i+1}$  的左侧;若  $X_{P_0} < X_{P_i} \&\& X_{P_0} < X_{P_{i+1}}$ ,则点在  $P_i P_{i+1}$  的右侧,如图 5(a)所示.
- (2) 当  $P_i P_{i+1}$  为增单调边时,若  $X_{P_0} < X_{P_i} \&\& X_{P_0} < X_{P_{i+1}}$ ,则点在  $P_i P_{i+1}$  的左侧;若  $X_{P_0} > X_{P_i} \&\& X_{P_0} > X_{P_{i+1}}$ ,则点在  $P_i P_{i+1}$  的右侧,如图 5(b).

$X_{P_0} > X_{P_{i+1}}$ ,则点在  $P_i P_{i+1}$  的右侧,如图 5(b).

(3) 当  $P_0$  不满足以上两个条件时,则由下式来判断

$$C = (P_i - P_0) \times (P_{i+1} - P_0) \tag{5}$$

则有

$$C \begin{cases} > 0, & \text{点在 } P_i P_{i+1} \text{ 左侧} \\ = 0, & \text{点在 } P_i P_{i+1} \text{ 上} \\ < 0, & \text{点在 } P_i P_{i+1} \text{ 右侧} \end{cases} \tag{6}$$

结合相关边的查找可知,对  $P_0$  的非相关边和满足条件 1 或条件 2 的相关边(如图 3 中检测点  $P_{01}$  与其减相关边  $LM$ )只需进行条件判断运算,而无需经

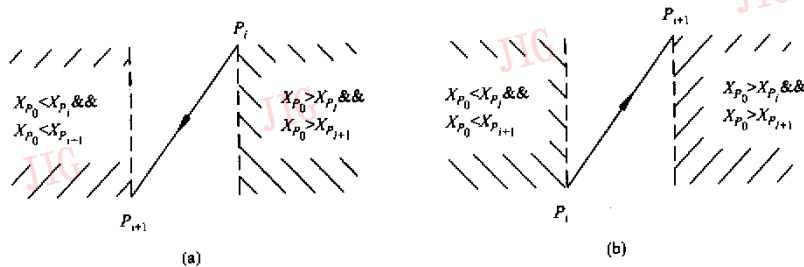


图 5 无需经过叉积判断即可判别点与边间的位置关系

过叉积运算;只有对不满足条件1或条件2的 $P_0$ 的相关边,如图3中 $P_{01}$ 与其增相关边 $MA$ ,才需进行1次叉积判断运算.因此大大减少了判断的计算量,加快了点与多边形关系判断的速度.

### 3 算法实现

#### 3.1 算法步骤

(1) 建立多边形顶点的存储链表,找出多边形的最高、最左、最低、最右顶点.

(2) 做检测点在多边形包围盒内外的测试,若检测点在包围盒外,则点在多边形外,算法结束;否则继续执行.

(3) 找出检测点的相关边对,并进行关系判断,若点在多边形的边上,则算法结束;否则计算 $s$ :若 $s = 2$ ,点在多边形内,算法结束;若 $s = 0$ ,点在多边形外,算法结束;否则,点在多边形上,算法结束.

#### 3.2 算法实例

以图3为例对算法加以说明,根据算法,检测点 $P_{01}$ 与其相关边间的位置关系有 $R_{KL} = R_{MA} = R_{AB} = R_{CD} = R_{GH} = 1, R_{LM} = R_{BC} = R_{HI} = -1$ ,则有

$$s = R_{KL} + R_{LM} + R_{MA} + R_{AB} + R_{BC} + R_{CD} + R_{GH} + R_{HI} = 2$$

从而判定 $P_{01}$ 在多边形内.依据算法对 $P_{01}$ 点的判断只需进行一次叉积判断运算( $P_{01}$ 点与其相关边 $MA$ 间需进行叉积判断运算)和有限的条件判断运算.

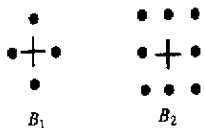
在Pentium II 350上应用Turbo C 2.0编程,对落在以 $(-80, 160)$ 为左上顶点,以 $(140, -90)$ 为右下顶点的矩形内的10 000 000个随机点,用图3所示的多边形进行检测,结果如表1所示,表中的时间为Turbo C 2.0中的滴答数.为了更好地比较各算法对判断同样的点所需的时间,表中所列时间均不包括建立链表的所需时间.

表1 各种算法时间与效率比较

	经典射线法	文献[1]算法	本文新算法
运算时间	1 253	907	535
与本文算法的时间比	2.342	1.695	1

随着多边形边数的增加,新算法在判断速度上的优势将更加明显.

#### 4 结束语



断作为计算机图形学领域的一个研究有着重要的理论与实际意义.

本文充分挖掘多边形边的基本性质及检测点与多边形边之间内在的坐标关系,提出了一种适合于简单多边形内外点判断的新算法,新算法简捷、高效、可靠.

显然,本文的研究成果具有普遍意义,可以推广到存在内环及非相邻边之间相交的多边形内外点判断,从而可以在更广泛的范围内提高该类算法的效率,进一步拓展应用空间.

#### 参考文献

- 1 Wu Hua-yi, Gong Jian-ya, Li De-ren *et al.* An algebraic algorithm for point inclusion query [J]. *Computers & Graphics*, 2000, 24(4): 517~522.
- 2 李维诗, 李江雄, 柯映林. 平面多边形方向及内外点判断的新方法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2000, 12(6): 405~407.
- 3 孙家广等. *计算机图形学*[M]. 北京:清华大学出版社, 2000, 7.
- 4 Huang CW, Shih TY. On the complexity of point-in-polygon algorithms[J]. *Computer and Geosciences*, 1997, 23(1): 109~118.
- 5 Taloy G. Point in polygon test [J]. *Survey Review*, 1994, 32(254): 479~484.
- 6 Feito F R, Torres J C, Urena A. Orientation, simplicity and inclusion test for planar polygons [J]. *Computers & Graphics*, 1995, 19(4): 595~600.



李基拓 1979年生,硕士研究生.主要研究方向为计算机图形学、计算机辅助设计.



陆国栋 1963年生,博士,教授,浙江大学工程及计算机图形学研究所副所长.主要研究领域为智能CAD、三维重建、工程图样计算机理解等.



冯星 1952年生,副教授.主要从事计算机辅助设计和工程图形学的研究.